Методы интерполяции

- Кусочно-постоянная интерполяция
- Кусочно-линейная интерполяция
- Метод обратных расстояний (Shepard 1968):

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i f_i \;; \qquad w_i = h_i^{-p} / \sum_{j=1}^{n} h_j^{-p} \qquad \left(h_i = \sqrt{(x-x_i)+(y-y_i)}\right)$$

Franke & Nielson, 1980:

$$w_i = \left(\frac{R-h_i}{Rh_i}\right)^2 / \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R-h_j}{Rh_j}\right)^2$$

Методы интерполяции

- Метод градиентных плоскостей:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i Q_i(x,y)\ ; \quad Q_i(x,y)=f_{i,x}(x-x_i)+f_{i,y}(y-y_i)+f_i$$

f вычисляются либо по соседним точкам, либо по всем точкам методом наименьших квадратов

- Метод квадратичной интерполяции

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i Q_i(x,y)\ ; \quad \deg\big(Q_i(x,y)\big)=2$$

Кригинг (**kriging**)

- Понятие *стационарного случайного процесса*
  - сильная стационарность: инвариантность распр. сл.в. отн.сдвига
  - слабая стационарность: инвариантны только среднее и ковариация

$$E(Z(x)) = m; \quad Cov(x, x+h) = E(Z(x)Z(x+h)) - m^2 = C(h)$$

- Вариограмма

вариограмма: $\gamma(h) = E\left((Z(x) - Z(x+h))^2\right)/2$

эксп.вариограмма: оценка $\gamma(h)$ по скважинам, расстояние между которыми лежит в интервале $[h-\varepsilon, h+\varepsilon]$

теоретическая вариограмма: выбирается из набора наперед заданных вариограмм с оптимизацией параметров

примеры теоретических вариограмм:

$$\gamma(r) = r/R; \quad \gamma(r) = (r/R)^{2\beta+1}; \quad \gamma(r) = \exp(C(r/R)^2)$$

Кригинг

- Простой кригинг

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n} w_i f_i(X) \quad \left(f_i(X)=\gamma(|X-X_i|)\right): \quad \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(X_j)=F(X_j);$$

- Ординарный кригинг

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n} w_i f_i(X)+\lambda: \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(X_j)+\lambda=F(X_j); \ \sum_{i=1}^{n} w_i=1$$

- Универсальный кригинг
  предполагает наличие *тренда*

Универсальный кригинг

Требуется построить интерполяцию функции $R^2 \to R$, которая в точках X_i $(i=1,\dots,n)$ принимает значение Y_i

Интерполяция строится в виде

$$F(X) = C_0 + C_1 * x_1 + C_2 * x_2 + \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(X) \quad \left(f_i(X) = \gamma(|X - X_i|)\right)$$

В качестве функции γ можно брать, например, $\gamma(X) = |X|$. Собственно, метод кригинга как раз и заключается в обосновании выбора фунцкий $\gamma()$.

Т.к. у нас есть $n+3$ неизвестных, то нам требуется $n+3$ линейных уравнения, решение которых даст неизвестные коэффициенты C_0, C_1, C_2, w_i:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f_i(X_j) = Y_j - (C_0 + C_1 * x_{1,j} + C_2 * x_{2,j})$$

C_0, C_1, C_2 ищутся методом наименьших квадратов из соображений минимизации величины

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - (C_0 + C_1 * x_{1,i} + C_2 * x_{2,i}))^2$$

по C_0, C_1, C_2. Исходя из этой задачи имеем систему уравнений для нахождения C_0, C_1, C_2:

$$nC_0 + C_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + C_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2,i} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$C_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + C_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1,i}^2 + C_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2,i} x_{1,i} = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_{1,i}$$

$$C_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2,i} + C_1 \sum_{i=1}^{n} x_{2,i} x_{1,i} + C_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_{2,i}$$