Модификация массивов на подмножестве индексов

Пусть задан массив $\mathbf{a} = \{a_i\}$ длины n. Назовем подмножеством массива часть из его элементов, стоящих на позициях (индексах), задаваемых некоторым условием или явно указанных в отдельном массиве индексов. Примерами подмножеств могут служить множество элементов, имеющих четные индексы, множество элементов, которые делятся на указанное число, множество элементов, образующих возрастающие участки, множество элементов, индексы которых указаны в дополнительном массиве ind длины $k \leq n$ и т.п.

Ставится задача обработки или модификации указанного подмножества данного массива. При этом предполагается, что элементы массива, не входящие в данное подмножество, не меняются, а их взаимное расположение сохраняется при любых модификациях подмножества. В частности, если при обработке подмножества требуется добавление или удаление элементов, то элементы, не входящие в подмножество, могут сдвигаться, но ни в коем случае не переставляться друг относительно друга.

Варианты действия:

— Переставить элементы указанного множества по некоторому правилу (например, отсортировать), а элементы, не входящие в него, оставить на их прежних позициях

— Исключить из подмножества некоторые элементы, при этом элементы не из подмножества могут сдвигаться, чтобы устранить образовавшиеся "дыры"

— Добавить в подмножество новые элементы, при этом добавление предполагается только “рядом” с уже имеющимися элементами подмножества, а элементы не из подмножества сдвигаются, чтобы предоставить необходимое место в массиве

— Изменить некоторые элементы подмножества.

Практически во всех подобных задачах сначала требуется создать массив индексов модифицируемых элементов. В дальнейшем будет использоваться цикл по элементам с индексами из созданного массива индексов.

Для двумерного массива в рассмотренной задаче в качестве элемента рассматривается строка или столбец массива.

Например, в двумерном массиве можно выделить столбцы, состоящие из положительных чисел, и далее требуется переставить столбцы с данными индексами так, чтобы они образовывали возрастающую по сумме чисел в столбце последовательность. При этом остальные столбцы должны остаться на своих местах.

Задачи с матрицами.

1. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых есть хотя бы один элемент, который при делении на M дает остаток N. Если в этом подмножестве есть группы столбцов с последовательно идущими номерами, то в каждой такой группе оставить только первый и последний столбцы, а “промежуточные” столбцы из матрицы удалить. Столбцы

матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

2. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы принадлежат диапазону $[M, N]$. Если в этом подмножестве есть группы одинаковых столбцов с последовательно идущими номерами, то в каждой такой группе оставить только один столбец, а остальные "копии" из матрицы удалить. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

3. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы при делении на M дают остаток N. Если в этом подмножестве есть группы одинаковых столбцов с последовательно идущими номерами, то удалить такую группу столбцов из матрицы, если количество столбцов в ней делится на N. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

4. Дана матрица целых чисел и натуральное число M. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы больше M. Если в этом подмножестве есть группы столбцов, "упорядоченных по возрастанию", то в каждой такой группе оставить только первый и последний столбцы, а остальные "промежуточные" столбцы из матрицы удалить. Упорядоченность понимается в смысле покомпонентного сравнения всех элементов столбцов, т.е. j-й столбец не превосходит (j+1)-го столбца, если a(i,j) <= a(i, j+1) для всех i. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

5. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых у всех элементов M-тый бит равен 0. Если в этом подмножестве есть группы из более, чем N столбцов с последовательно идущими номерами, то оставить в ней только первые N столбцов, а остальные столбцы из этой группы удалить. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

11. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы при делении на M дают остаток N. Упорядочить по возрастанию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению их максимальных элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

12. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых есть хотя бы один элемент, который при делении на M дает остаток N. Упорядочить по возрастанию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению сумм их элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

13. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых есть хотя бы один элемент, который при делении на M дает остаток N. Упорядочить по убыванию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению их минимальных элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

14. Дана матрица целых чисел и целое число M . Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы больше M . Упорядочить по возрастанию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению сумм модулей их отрицательных элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

15. Дана матрица целых чисел и натуральное число M . Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых нет элементов, содержащих в двоичной записи ровно M единиц. Упорядочить по убыванию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению общего количества единиц в двоичных записях всех элементов каждого столбца. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

21. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N . Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы при делении на M дают остаток N . Разобьем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). В каждой паре заменим элементы первого столбца на минимум из него самого и элемента второго столбца с тем же i. Второй столбец каждой пары удалить из матрицы. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

22. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N . Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы принадлежат диапазону $[M, N]$. Разобьем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). В каждой паре заменим элементы a(i,j) первого столбца на минимум из элементов второго столбца, индекс которых не превосходит i. Второй столбец каждой пары удалить из матрицы. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

23. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N . Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы делятся на M . Разобьем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). Каждую пару столбцов заменим на один столбец, элементы которого a(i,j) есть сумма количества единиц в битовом представлении элементов с одним индексом i в этой паре Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

24. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N . Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы делятся на M . Разобьем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). Каждую пару столбцов заменим на один столбец, элементы которого a(i,j) есть максимум из двух чисел, составленных из младших N бит элементов с одним индексом i в этой паре. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

25. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых хотя бы один элемент делит нацело M. Разобьем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). От каждой пары оставим в матрице только один столбец, а именно тот, который имеет больше элементов, делящихся на N (при равенстве оставляем первый из пары), а другой удаляем. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.