

Задачи по программированию на 1 курсе механико-математического факультета.

5. Примерные задачи.

Первый семестр:

Обработка последовательностей.

Работа с массивами.

Битовые операции.

Сортировки.

Вычислительная геометрия.

Разное.

Второй семестр:

Задачи численного анализа.

Работа с матрицами.

Обработка текстов

Разное.

Пункт “разное”, включенный в список обоих семестров, открывает широкие возможности для заинтересованных преподавателей.

В качестве примера заданий здесь приводится список, использующийся много лет на 2 потоке 1 курса. Каждый студент получает в качестве задания в сумме 12 задач такого типа на первый семестр. Наверное, пока также можно придерживаться подобной нагрузки. Количество задач, выдаваемых индивидуально для решения студенту из каждого раздела, указано в скобках после заголовка.

В свете введения формальных проверяющих процедур, общие требования к реализации должны быть уточнены.

5.1. Обработка последовательностей (3 задачи).

В следующих задачах предполагается, что в файле записана последовательность чисел неизвестной длины (возможно, пустая). Требуется за один просмотр файла и без запоминания последовательности в массиве определить требуемую характеристику последовательности.

Программа должна содержать функцию, которая получает в качестве параметра имя файла (или указатель на файл) и возвращает требуемое значение. Функция main запрашивает с клавиатуры имя файла, обращается к функции и выводит результат на экран.

Локальным максимумом последовательности $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется подпоследовательность данной последовательности $\{a_j\}_{j=k,\dots,l}$, элементы которой равны между собой и для которых выполняются соотношения: 1) $k = 1$ или $a_{k-1} < a_k$; 2) $l = N$ или $a_{l+1} < a_l$.

Локальным минимумом последовательности $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется подпоследовательность данной последовательности $\{a_j\}_{j=k,\dots,l}$, элементы которой равны между собой и для которых выполняются соотношения: 1) $k = 1$ или $a_{k-1} > a_k$; 2) $l = N$ или $a_{l+1} > a_l$.

Постоянным участком последовательности $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется подпоследовательность данной последовательности $\{a_j\}_{j=k,\dots,l}$, $k < l$, элементы которой равны между собой и для которых выполняются соотношения: 1) $k = 1$ или $a_{k-1} \neq a_k$; 2) $l = N$ или $a_{l+1} \neq a_l$.

Последовательность $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется *возрастающей*, если для всех $i = 1, \dots, N - 1$ выполняется соотношение: $a_i \leq a_{i+1}$.

Последовательность $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется *убывающей*, если для всех $i = 1, \dots, N - 1$ выполняется соотношение: $a_i \geq a_{i+1}$.

Последовательность $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется *строго возрастающей*, если для всех $i = 1, \dots, N - 1$ выполняется соотношение: $a_i < a_{i+1}$.

Последовательность $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется *строго убывающей*, если для всех $i = 1, \dots, N - 1$ выполняется соотношение: $a_i > a_{i+1}$.

Номера задач для студента с номером в списке i вычисляются по формулам: $n_1 = (i * 29) \% 46 + 1$, $n_2 = (i * 29 + 10) \% 46 + 1$, $n_3 = (i * 29 + 20) \% 46 + 1$.

1. Среднее арифметическое чисел из последовательности.
2. Количество чисел, больших предыдущего.
3. Есть ли в последовательности число X ?
4. Есть ли в последовательности числа, не принадлежащие локальным максимумам или локальным минимумам?
5. Каких элементов последовательности больше: с четными значениями, или с нечетными?
6. Каких элементов последовательности больше: равных первому элементу последовательности, или второму?
7. Каких элементов последовательности больше: больших предыдущего, или меньших предыдущего?
8. Каких элементов последовательности больше: больших первого элемента последовательности, или меньших?
9. Что больше: сумма элементов массива с четными индексами, или с нечетными?
10. Сколько элементов последовательности находятся в интервале между значениями первого и второго элемента последовательности, т.е. найти количество элемен-

тов последовательности, для которых выполняется соотношение: $\min(a_1, a_2) < a_i < \max(a_1, a_2)$.

11. Номер последнего числа, равного X .
12. Номер последнего числа, равного первому или второму элементу последовательности (ответ может быть равным 1 или 2).
13. Все ли элементы последовательности равны между собой?
14. Все ли элементы последовательности, принадлежащие локальным минимумам, равны между собой?
15. Что больше: сумма элементов последовательности с четными значениями, или с нечетными?
16. Является ли последовательность возрастающей, убывающей?
17. Является ли последовательность арифметической прогрессией?
18. Является ли последовательность геометрической прогрессией?
19. Является ли последовательность знакопеременной? Т.е. все ли соседние элементы последовательности имеют разный знак? Будем считать, что наличие нулевого элемента последовательности делает ее не знакопеременной.
20. Можно ли убрать из последовательности один элемент таким образом, чтобы вся оставшаяся последовательность состояла из равных элементов?
21. Можно ли убрать из последовательности один элемент таким образом, чтобы вся оставшаяся последовательность была бы возрастающей?
22. Можно ли изменить один элемент последовательности таким образом, чтобы вся оставшаяся последовательность стала бы строго возрастающей?
23. Удовлетворяют ли элементы последовательности данному рекуррентному соотношению $c_1 a_{i+1} + c_2 a_i + c_3 a_{i-1} = b$?
24. Количество различных элементов неубывающей последовательности.
25. Количество различных элементов последовательности, значения элементов которой принадлежат множеству $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
26. Количество различных элементов последовательности, все значения элементов которой либо равны a_1 , либо равны a_2 , либо равны a_3 , либо равны a_4 .
27. Общее количество элементов в постоянных участках последовательности.
28. Номер первого числа, равного максимуму из всех чисел.
29. Номер последнего числа, равного минимуму из всех чисел.
30. Количество чисел, равных минимальному.
31. Количество чисел, не равных максимальному.
32. Количество чисел, равных полусумме предыдущего и последующего элементов последовательности.
33. Количество элементов последовательности, для которых выполняется соотношение: $a_i > i$.
34. Количество элементов последовательности в последнем локальном минимуме последовательности.
35. Максимальная длина локального максимума последовательности.
36. Максимальное значение $|a_i - a_{i+1}|$ в последовательности (максимальный перепад значений).
37. Среднее квадратическое отклонение от среднего арифметического.
$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M)^2$$
, где M — среднее арифметическое.
38. Экспоненциально взвешенное среднее: $S = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{i=1}^n x_i \lambda^{n-i}$, где $0 < \lambda < 1$ — параметр, вводимый с клавиатуры.

39. Величину максимального отклонения элементов последовательности от среднего значения.
40. Количество возрастающих участков последовательности.
41. Длина наибольшего постоянного участка.
42. Длина наибольшего возрастающего участка.
43. Максимальное расстояние между локальными минимумами.
44. Максимальная сумма подряд идущих элементов последовательности, т.е. найти максимальное значение величины $s_{k,l} = \sum_{i=k,\dots,l} a_i$.
45. Последовательность чисел представляет собой коэффициенты многочлена по возрастанию степеней. Вычислить многочлен и его производную в точке x .
46. Последовательность чисел представляет собой коэффициенты многочлена по убыванию степеней. Вычислить многочлен и его производную в точке x .

5.2. Работа с массивами (3 задачи).

Решения следующих задач должны содержать функцию, которая получает в качестве параметров имя массива и его длину и без использования дополнительных массивов выполняет необходимые действия.

Функция `main` должна заполнить массив числами из файла. Для определения длины массива предусматривается два варианта: 1) по значению первого числа в файле, 2) непосредственным подсчетом количества чисел в файле. Результат также выводится в файл.

Первой задачей из данного раздела для студента с номером в списке i является задача из предыдущего раздела, сделанная с помощью массивов. Номер, при этом, вычисляется по формуле $n_1 = (i * 15) \% 46 + 1$.

Номера задач из данного раздела для студента с номером в списке i вычисляются по формулам: $n_2 = (i * 29) \% 23 + 1$, $n_3 = (i * 29 + 7) \% 23 + 1$.

0. Решить все задачи предыдущего раздела, заменив последовательность на массив значений.
1. Симметричны ли значения элементов массива?
 2. Переставить элементы массива в обратном порядке.
 3. Циклически сдвинуть элементы массива на одну позицию вправо.
 4. Сравнить два неупорядоченных целочисленных массива A и B как числовые множества: $A = B$ и $A \subset B$.
 5. Удалить из массива все отрицательные значения, а оставшиеся уплотнить (сдвинуть) с сохранением исходного порядка к началу массива.
 6. Циклически сдвинуть элементы массива на K позиций вправо с затратами $O(N)$ действий (N -длина массива)
 7. Каждый элемент массива заменить на полусумму соседей (кроме первого и последнего)
 8. Назовем x -отрезком группу подряд идущих элементов массива, каждый из которых равен x . Для заданного числа x заменить элементы каждого x -отрезка на полусумму элементов, прилегающих к этому отрезку справа и слева. Если x -отрезок расположен в начале или конце массива, считать недостающий крайний элемент равным нулю.
 9. Сгруппировать положительные элементы массива в его начале, а отрицательные - в конце с сохранением их порядка.
 10. Получить массив биномиальных коэффициентов для степени N , последовательно вычисляя строки треугольника Паскаля (можно использовать только один мас-

сив).

11. Элементы массива не убывают. Двоичным поиском определить позицию, где в этот массив можно вставить данное число x .
12. Даны два неубывающих массива. Построить третий неубывающий массив, который является объединением первых двух.
13. Пусть в массиве последовательно записаны цифры некоторого длинного десятичного числа. Реализовать функции "прибавляющие единицу" и "вычитающие единицу" из такого числа.
14. Удалить все элементы массива с четными значениями, уплотнив массив к его началу. Функция должна возвращать количество элементов в получившемся массиве.
15. Заменить все локальные минимумы в массиве одним элементом, значение которого равно элементу массива с минимальным значением. Функция должна возвращать количество элементов в получившемся массиве.
16. Заменить каждый элемент массива количеством элементов массива с меньшими индексами, имеющими значение, меньше данного элемента, т.е. каждый элемент массива a_i заменить количеством элементов массива a_j , таких что $j < i$ и $a_j < a_i$.
17. Отнормировать все элементы массива $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ на интервал $[\min\{a_1, \dots, a_N\}, \max\{a_1, \dots, a_N\}]$, т.е. в случае, когда все элементы массива совпадают, изменять массив не следует, иначе заменить каждый элемент массива на значение $\min\{a_1, \dots, a_N\} + [(a_i - \min\{a_1, \dots, a_N\}) / (\max\{a_1, \dots, a_N\} - \min\{a_1, \dots, a_N\})]$.
18. Заменить все минимальные элементы массива на значение элемента массива, большего минимального, но не большего всех остальных элементов массива.
19. Удалить из массива наиболее часто встречающееся значение. Если таких значений несколько, то выбрать любое из них. Функция должна возвращать количество элементов в получившемся массиве.
20. Удалить из массива наименее часто встречающееся значение. Если таких значений несколько, то удалить все эти значения. Функция должна возвращать количество элементов в получившемся массиве.
21. В каждом интервале строгого возрастания в массиве заменить все значения в данном интервале на среднее значение в интервале (рассматриваются интервалы возрастания в массиве, которые нельзя удлинить).
22. Поменять местами в массиве локальные минимумы с соседними порядковыми номерами, т.е. поменять местами в массиве локальные минимумы с номерами $2i$ и $2i + 1$ для всех возможных i .
23. Удалить из массива элементы, содержащиеся во всех интервалах строгого возрастания с длиной не более 3. Функция должна возвращать количество элементов в получившемся массиве.

5.3. Битовые операции (1 задача).

1. Возвести число в степень N за не более чем $2 \log_2 N$ умножений.
2. Вывести в файл все подмножества множества $\{1, \dots, N\}$.
3. Вывести в файл все k -элементные подмножества мн-ва $\{1, \dots, N\}$.
4. Проверить четность количества единиц в двоичном представлении данного целого числа.
5. Найти первые N целых чисел, у которых младший байт является зеркальным отражением следующего байта.
6. Определить позицию самой старшей единицы в битовом представлении данного целого числа.

7. Написать функции, записывающие 0 или 1 в указанный бит данного целого числа и оставляющие остальные биты без изменения.

5.4. Сортировки (2 задачи).

Решение должно содержать отдельную функцию для сортировки массива, функцию для проверки массива на упорядоченность, функцию для чтения массива из файла и функцию для генерирования случайного массива указанной длины. Также нужно определить и вывести время, затраченное на сортировку массива.

Алгоритмы сортировки массивов:

1. Простая сортировка обментами.
2. Пузырьковая сортировка.
3. Сортировка просеиванием.
4. Вставка с последовательным поиском.
5. Вставка с бинарным поиском.
6. Сортировка слиянием. (см. задачу 12 для массивов).
7. Быстрая сортировка (quicksort).
8. Линейная сортировка целого массива.
9. Сортировка целого массива группировкой с последовательным упорядочиванием битов.

5.5. Вычислительная геометрия (2 задачи).

В следующих задачах предполагается, что в файле записано несколько пар чисел, которые можно рассматривать как координаты множества точек на плоскости или как координаты множества концов отрезков на прямой. Для представления геометрических объектов нужно использовать структуры.

1. Множество точек определяет ломаную. Имеет ли она самопересечения?
2. Множество точек определяет многоугольник. Является ли он выпуклым?
3. Множество точек определяет многоугольник. Для данной точки определить где она расположена относительно этого многоугольника: внутри, снаружи, на границе.
4. Дано множество отрезков на прямой. Принадлежит ли отрезок $[a, b]$ их объединению?
5. Два множества точек задают два многоугольника. Определить расстояние между этими многоугольниками
6. Дано множество точек. Найти центр и радиус минимального круга, который содержит все эти точки.
7. Дано множество отрезков на прямой. Выбрать из него и вывести те отрезки, объединение которых дает отрезок наибольшей длины.
8. Даны центры равномерно растущих кругов на плоскости. При столкновении друг с другом столкнувшиеся круги прекращают свой рост. Найти радиусы кругов, когда процесс роста остановится полностью.
9. Дано множество точек на плоскости. Построить выпуклую оболочку этого множества.
10. Множество точек определяет многоугольник. Построить многоугольник, который получится, если линию, задающую каждую сторону, отодвинуть в перпендикулярном ей направлении на величину h .

5.6. Разное (1+ задача).

1. Дано целое число. Получить целое число, записанное теми же цифрами в обратном порядке.
2. Вычислить представление числа $1/N$ в виде десятичной дроби (начало и период) (то же для числа M/N).

3. Найти наибольший общий делитель двух целых чисел.
4. Определить четность произвольной перестановки N чисел.
5. Вычислить первые N простых чисел.
6. Разложить натуральное число на простые множители
7. Вывести значение целого числа N в “словесной форме”.

Данный список не является окончательным, но может служить ориентиром по уровню подготовки студента и требованиям для выхода на общий зачет.

Предполагается, что зачетная (контрольная) задача может быть выполнена средним студентом за 1 час. Например, в качестве основной контрольной задачи на 12 неделе (или на зачете) может выступать такая формулировка:

В файле записано несколько целых чисел. Количество чисел заранее неизвестно и в файле никак отдельно не задано. Требуется определить количество чисел, создать массив в точности на это количество и заполнить его числами из файла. После этого надо написать функцию сортировки массива по возрастанию любым методом, но с условием, что при сравнении чисел принимается во внимание только значение, записанное в их 4 младших битах. Отсортировать массив и вывести его другой файл.

По второму семестру продолжение следует.